1.2. Сходящиеся последовательности и их свойства

План

1. Три варианта определения сходящихся ЧП
2. Теорема о числе пределов сходящейся ЧП
3. Теорема об ограниченности сходящейся ЧП
4. Теорема о сходимости суммы (разности) сходящихся ЧП
5. Теорема о сходимости произведения сходящихся ЧП
6. Лемма об ограниченности ЧП $\{1/y_n\}$ обратной по отношению к ЧП $\{y_n\}$
7. Теорема о сходимости частного двух сходящихся ЧП
8. Теорема о неравенствах, которым удовлетворяют элементы и пределы сходящихся ЧП
9. Теорема о сходимости и пределе ЧП, элементы которой заключены между элементами двух сходящихся ЧП

ЧП $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если существует такое число a, что ЧП $\{x_n - a\}$ является БМЧП. Число a называется **пределом** ЧП $\{x_n\}$. В соответствии с этим определением всякая БМЧП является сходящейся и имеет своим пределом число нуль. Можно дать ещё два эквивалентных определения сходящейся ЧП.

ЧП $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если существует такое число a, что $\forall\varepsilon > 0$ можно указать номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n \geq N(\varepsilon)$ все элементы этой ЧП удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1.3)$$

При этом число a называется **пределом** ЧП. Если ЧП $\{x_n\}$ сходится к пределу a, то символически это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \ \text{при} \ n \to \infty.$$

ББЧП иногда называют ЧП, сходящейся к бесконечности, и пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если все элементы ББЧП, начиная с некоторого номера, имеют определённый знак, то говорят, что ББЧП сходится к бесконечности определённого знака, обозначая это пределами:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Замечание. Неравенство (1.3) эквивалентно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Последние неравенства означают, что элемент x_n находится в ε-окрестности числа a (**ε-окрестностью числа** a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$).

В связи с этим определение сходящейся ЧП можно сформулировать также в следующей форме: ЧП $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если существует такое число a, что в любой ε-окрестности числа a находятся все элементы ЧП $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$.

Согласно определению сходящейся ЧП разность $x_n - a = \alpha_n$ является БМЧП. Следовательно, любой элемент x_n сходящейся ЧП, имеющий пределом число a, можно представить в виде:

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{1.4}$$

где α_n – элемент БМЧП.

Замечание. Из определения предела ЧП очевидно, что конечное число элементов (добавленных или изъятых из ЧП) не влияют на сходимость и величину предела этой ЧП.

Теорема 1.7. Сходящаяся ЧП имеет только один предел.

Доказательство. Пусть a и b – пределы сходящейся ЧП $\{x_n\}$. Тогда, используя представление (1.4) для элементов этой ЧП, найдём:

$$x_n = a + \alpha_n, \quad x_n = b + \beta_n,$$

где α_n, β_n – элементы БМЧП.

Вычитая написанные соотношения, получим:

$$\alpha_n - \beta_n = b - a.$$

Так как все элементы БМЧП $\{\alpha_n - \beta_n\}$ имеют одно и то же постоянное значение $b - a$, то по теореме 1.5 $b - a = 0$, то есть $b = a$.

Теорема доказана.

Теорема 1.8. Сходящаяся ЧП ограничена.

Доказательство. Пусть ЧП $\{x_n\}$ сходится к пределу a. Тогда справедлива формула $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – элемент БМЧП. Так как БМЧП согласно теореме 1.3 ограничена, то найдётся такое число $A > 0$, что $\forall n$ будет выполняться неравенство $|\alpha_n| \le A$. Поэтому $\forall n$

$$|x_n| \le |a| + A,$$

что и означает ограниченность ЧП $\{x_n\}$. Теорема доказана.

Замечание. Утверждение обратное теореме 1.8 не верно, то есть ограниченная ЧП может и не быть сходящейся. Например, ЧП $1, -1, 1, -1, \ldots$ ограничена, но не является сходящейся.

Теорема 1.9. Сумма сходящихся ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся ЧП, предел которой равен сумме пределов ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство. Пусть a и b – соответственно пределы ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда

$$x_n = a + \alpha_n, \qquad y_n = b + \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – БМЧП. Следовательно,

$$(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n.$$

Таким образом, ЧП $\{(x_n + y_n) - (a + b)\}$ есть БМЧП и поэтому ЧП $\{x_n + y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число $a + b$.

Теорема доказана.

Теорема 1.10. Разность сходящихся ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся ЧП, предел которой равен разности пределов ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы 1.9.

Теорема 1.11. Произведение сходящихся ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся ЧП, предел которой равен произведению пределов ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство. Если a и b – соответственно пределы ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то $x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n$ и

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Следовательно,

$$x_n y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

В силу теоремы 1.4, следствия из неё, а также теоремы 1.1 ЧП $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ есть БМЧП, то есть и ЧП $\{x_n y_n - ab\}$ есть БМЧП. Поэтому ЧП $\{x_n y_n\}$ сходится и имеет своим пределом число ab.

Теорема доказана.

Для доказательства соответствующей теоремы для частного двух ЧП понадобится следующая лемма.

Лемма 1.1. Если ЧП $\{y_n\}$ сходится к отличному от нуля пределу $b \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, определена ЧП $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$, которая является ограниченной.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = |b|/2$. Так как $b \neq 0$, то $\varepsilon > 0$. Пусть N – номер, соответствующий этому ε, начиная с которого выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$ или $|y_n - b| < |b|/2$. Из этого неравенства следует, что при $n \geq N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|y_n| > |b|/2$. Действительно, так как можно записать $b = (b - y_n) + y_n$, то

$$|b| \leq |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|.$$

Итак, при $n \geq N(\varepsilon)$ имеем $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$. Следовательно, начиная с этого номера $N(\varepsilon)$, определена ЧП вида $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ и эта ЧП ограничена.

Лемма доказана.

Теорема 1.12. Частное двух сходящихся ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел ЧП $\{y_n\}$ отличен от нуля, есть сходящаяся ЧП, предел которой равен частному пределов ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что, начиная с некоторого номера N, элементы ЧП $\{y_n\}$ отличны от нуля и ЧП $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограничена. Начиная с этого номера N, и будет рассматриваться ЧП $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. Пусть a и b –

пределы ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Докажем, что ЧП $\left\{\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right\}$ есть БМЧП. В самом деле, так как $x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n$, то

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Так как ЧП $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограничена, а ЧП $\left\{\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right\}$ есть БМЧП, то ЧП $\left\{\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right\}$ является БМЧП. Теорема доказана.

Замечание. Из сходимости ЧП $\{x_n\}$ следует сходимость ЧП $\{x_n+b\}$ и $\{cx_n\}$, и наоборот, из сходимости любой из ЧП $\{x_n+b\}$ или $\{cx_n\}$ $(c \neq 0)$ следует сходимость ЧП $\{x_n\}$.

Действительно, пусть $\{x_n\}$ сходится. Полагая $y_n = b$, получим сходящуюся ЧП $\{y_n\}$. Но тогда из теоремы 1.9 следует, что $\{x_n+b\}$ – сходящаяся ЧП. Обратно, если $\{x_n+b\}$ – сходящаяся ЧП, то, полагая $y_n=-b$ и используя теорему 1.9, убеждаемся, что $\{x_n\}$ сходится.

Аналогично, полагая $y_n = c$ или $y_n = 1/c$ $(c \neq 0)$ и применяя теорему 1.11, убедимся, что из сходимости $\{x_n\}$ следует сходимость $\{cx_n\}$ и наоборот.

В предыдущих теоремах выяснено, что арифметические операции над сходящимися ЧП приводят к таким же операциям над их пределами. Следующие две теоремы показывают, что неравенства, которым удовлетворяют элементы сходящихся ЧП, в пределе переходят в соответствующие неравенства для пределов этих ЧП.

Теорема 1.13. Если элементы сходящейся ЧП $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, то и предел a этой ЧП удовлетворяет неравенству $a \geq b$ $(a \leq b)$.

Доказательство. Пусть все элементы сходящейся ЧП $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$. Предположим, что $a < b$. Поскольку a – предел ЧП $\{x_n\}$, то для положительного $\varepsilon = b - a$ можно указать номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < b - a$. Это неравенство эквивалентно следующим двум неравенствам:

$$-(b-a) < x_n - a < b - a.$$

Используя правое из этих неравенств, получим $x_n < b$, а это противоречит условию теоремы. Случай $x_n \leq b$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Замечание. Элементы сходящейся ЧП $\{x_n\}$ могут удовлетворять строгому неравенству $x_n > b$, однако предел a может оказаться равным b. Например, если $x_n = \frac{1}{n}$, то все $x_n > 0$, однако $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Следствие 1. Если элементы x_n и y_n сходящихся ЧП $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \le y_n$, то их пределы удовлетворяют такому же неравенству:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n.$$

В самом деле, все элементы ЧП $\{y_n - x_n\}$ неотрицательны, а поэтому неотрицателен и её предел:

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \ge 0.$$

Отсюда и следует предыдущее неравенство.

Следствие 2. Если все элементы сходящейся ЧП $\{x_n\}$ находятся на сегменте $[a, b]$, то и её предел c также находится на этом сегменте.

В самом деле, так как $a \le x_n \le b$, то и $a \le c \le b$.

Следующая теорема имеет важное прикладное значение.

Теорема 1.14. Пусть $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ – сходящиеся ЧП, имеющие общий предел a. Пусть, кроме того, начиная с некоторого номера, элементы ЧП $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенствам $x_n \le y_n \le z_n$. Тогда ЧП $\{y_n\}$ сходится и имеет предел a.

Доказательство. Достаточно доказать, что ЧП $\{y_n - a\}$ является БМЧП. Обозначим через N^* номер, начиная с которого выполняются неравенства, указанные в условии теоремы. Тогда, начиная с этого же номера, будут выполняться неравенства:

$$x_n - a \le y_n - a \le z_n - a.$$

Отсюда следует, что при $n \ge N^*$ элементы ЧП $\{y_n - a\}$ удовлетворяют неравенству:

$$|y_n - a| \le \max\{|x_n - a|, |z_n - a|\}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номера N_1 и N_2 такие, что при $n \ge N_1$ $|x_n - a| < \varepsilon$, а при $n \ge N_2$ $|z_n - a| < \varepsilon$. Пусть $N = \max\{N^*, N_1, N_2\}$. Начиная с этого номера, имеет место неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$, то есть $\{y_n - a\}$ есть БМЧП. Теорема доказана.

Основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть I. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть II. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2,3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.